

Equations différentielles linéaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1) $x\ln xy' + y = x$, $I =]1,+\infty[$ 2) $x(xy'+y-x) = 1$, $I =]-\infty,0[$
3) $2xy' + y = x^4$, $I =]-\infty,0[$ 4) $y' + 2y = x^2 - 3x$, $I = \mathbb{R}$
5) $y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$, $I = \mathbb{R}$ 6) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$, $I =]0,\pi[$

Correction ▼ [005476]

Exercice 2 ***I

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1,+\infty[$, $I =]-1,1[$, $I =]-1,+\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

Correction ▼ [005477]

Exercice 3 ***

Résoudre sur $\} -\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Correction ▼ [005478]

Exercice 4 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$ 2) $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ 3) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
4) $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x \sin x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Correction ▼ [005479]

Exercice 5 **

On considère l'équation différentielle (E) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0,+\infty[$.

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Correction ▼ [005480]

Exercice 6 **

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et pèriodique de pèriode $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

Correction ▼ [005481]

Correction de l'exercice 1 ▲

Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x\ln x f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ln x f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\ln x.f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xf)'(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}.$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I =]-\infty, 0[$ et on saitque les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{x^3}{2}$$
$$\forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}f(x) = \frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x}f)'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{7/2}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x}f(x) = \frac{1}{9}(-x)^{9/2} + \lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x) = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x) = (x^2-3x)e^{2x}$$

Recherche d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$.

1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned}\int (x^2-3x)e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x^2-3x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x-3)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{4}(2x^2-8x+3)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}(x^2-4x+2)e^{2x}+C\end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons les primitives de $x\mapsto(x^2-3x)e^{2x}$ sous la forme $x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})'=(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))e^{2x}=(2ax^2+2(a+b)x+b+2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2+bx+c)e^{2x})'=(x^2-3x)e^{2x}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2a=1\\ 2(a+b)=-3\\ b+2c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\\ b=-2\\ c=1\end{array}\right..$$

Résolution de $(\mathbf{E})$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x)=(x^2-3x)e^{2x}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ e^{2x}f(x)=(\frac{x^2}{2}-2x+1)e^{2x}+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}.\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme$x\mapsto\frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x}$,$\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Les fonctions $x\mapsto 1$ et $x\mapsto\frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+2e^x}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^xf'(x)+e^xf(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ e^xf(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda)e^{-x}\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)+\lambda)e^{-x}$,$\lambda\in\mathbb{R}$.

6. Les fonctions $x\mapsto-\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x\mapsto-\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I=]0,\pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).
Mais $x\mapsto\sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur I et $x\mapsto\cos x$ est une solution de (E) sur $]0,\pi[$.
Les solutions de (E) sur $]0,\pi[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\sin x+\cos x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.
Soit I l'un des deux intervalles $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$. Les fonctions $x\mapsto\frac{-2x}{1-x^2}$ et $x\mapsto\frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (1-x^2)f'(x)-2xf(x)=x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ ((1-x^2)f)'(x)=x^2 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ (1-x^2)f(x)=\frac{x^3}{3}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{x^3+\lambda}{3(1-x^2)}, \end{aligned}$$

(en renommant λ la constante 3λ).
Si $I=]-1,+\infty[$.
Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 etλ_2 telles que, pour $-1<x<1$, $f(x)=\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x>1$, $f(x)=\frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1)=-\frac{1}{2}$.
En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x>-1,\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} \text{ si } -1<x<1 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x=1 \\ \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} \text{ si } x>1 \end{cases}.$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $]-1,1[$ et solution de (E) sur $]-1,1[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur $]1,+\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x=1$. Donc, f est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.
Pour $-1<x<1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}+\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1+\lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1\neq-1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1, f n'est pas dérivable à droite en -1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Dans ce cas, pour $x\in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x)=\frac{x^3-1}{3(1-x^2)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)}=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x=1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$, nécessairement pour $x>-1$, $f(x)=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.
Sur $]-1,+\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x\mapsto-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.
Si $I=\mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $]-1,+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.
Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x)+(1-\frac{1}{x})f(x)=x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+(1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x)=e^{x-\ln x}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'(x)=xe^x=((x-1)e^x)'\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x)=xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda)=x^2-x+\lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.
Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ f'(x)+(-1+\frac{1}{x})f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x)=-e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}y)'=x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto -x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=(-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x}=(-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e^{-x},$$

et

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=x^3e^{-x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-a=-1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\b=3\\c=6=d\end{array}\right..$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut montrer que l'équation admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ en « recollant » les expressions précédentes, mais en ce début d'année, on manque encore d'outils.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$ est $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y''-2y'+2y=\frac{x}{4}(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$.

$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a)\\&\quad-2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x}\\&=(2(1+i)(2ax+b)+2a-2((2ax+b)))e^{(1+i)x}=(2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x}\\&=(4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$f''-2f'+2f=xe^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4ia=1\text{ et }2ib+2a=0\Leftrightarrow a=-\frac{i}{4}\text{ et }b=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(1-i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{4}(ix^2+x)e^{(1-i)x}$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$.
$-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax+b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((-1+i)^2(ax+b)+2(-1+i)a)-2((-1+i)(ax+b)+a)+2(ax+b))e^{(-1+i)x}\\&=((ax+b)(-2i-2(-1+i)+2)+2(-1+i)a-2a)e^{(-1+i)x}\\&=(4(1-i)(ax+b)-2(2-i)a)e^{(1+i)x}=(4(1-i)ax-2(2-i)a+4(1-i)b)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f=xe^{(-1+i)x}&\Leftrightarrow 4(1-i)a=1\text{ et }4(1-i)b-2(2-i)a=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1+i}{8}\text{ et }b=\frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)}=\frac{(3+i)(1+i)}{32}=\frac{1+2i}{16}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x}$.
Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=xe^{(-1-i)x}$ est $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1-i)x+1-2i)e^{(-1-i)x}$.
Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=x\cos x\,\mathrm{ch}\,x$ est donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(2\mathrm{Re}(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}+\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x})\\&=\frac{1}{32}\mathrm{Re}(4(-ix^2+x)(\cos x+i\sin x)e^x+(2x+1+2(x+1)i)(\cos x+i\sin x)e^{-x}\\&=\frac{1}{32}(4(x\cos x+x^2\sin x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})\end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\frac{1}{8}(x\cos x+x^2\sin x)+\lambda\cos x+\mu\sin x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\sin x)e^{-x})$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+6y'+9y=0$ est $r^2+6r+9=0$ qui admet la racine double $r=-3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
   2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned} f''+6f'+9f &= ((4(ax^2+bx+c)+4(2ax+b)+2a)+6(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))+9(ax^2+bx+c))e^{2x} \\ &= (25(ax^2+bx+c)+10(2ax+b)+2a)e^{2x} = (25ax^2+(20a+25b)x+2a+10b+25c)e^{2x} \end{aligned}$$

puis,

$$f''+6f'+9f = x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a=1 \text{ et } 20a+25b=0 \text{ et } 2a+10b+25c=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{25} \text{ et } b=-\frac{4}{125} \text{ et } c=\frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$ est $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

3. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+y=0$ est $r^2-2r+1=0$ qui admet la racine double $r=1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$.
1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ax^2e^x$. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$f''-2f'+f = ((ax^2+2(2ax)+2a)-2(ax^2+(2ax))+ax^2)e^{2x} = 2ae^x$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^x \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x$ est $x\mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$.
-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{-x}$.

$$f''-2f'+f=(a+2a+a)e^{-x}=4ae^{-x}$$

puis,

$$f''-2f'+f=e^{-x} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{-x}$ est $x\mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x\mapsto (\frac{x^2}{4}+\lambda x+\mu)e^x+\frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

4. Soit $k\in\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2ky'+(1+k^2)y=0$ est $r^2-2kr+1+k^2=0$ dont le discriminant réduit vaut $-1=i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k+i$ et $k-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^{kx}(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Le second membre s'écrit $\mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y''-2y'+y=e^{(1+i)x}$.
Si $k\neq 1$, $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto ae^{(1+i)x}$. Or,

$$f''-2kf'+(1+k^2)f = a((1+i)^2-2k(1+i)+1+k^2)e^{(1+i)x} = ((k-1)^2-2(k-1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f''-2kf'+(1+k^2)f=e^{(1+i)x}\Leftrightarrow a=\frac{1}{k-1}\frac{1}{k-1-2i}=\frac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^{(1+i)x}$ est $x\mapsto \frac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y''-2y'+y=e^x\sin x$ est

$$\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}\mathrm{Im}((k-1-2i)(\cos x+i\sin x)e^x=\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x+(k-1)\sin x)e^x.$$

Si $k\neq 1$, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x+(k-1)\sin x)e^x+(\lambda\cos x+\mu\sin x)e^{kx},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Supposons y deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, puisque pour tout réel t, $z(t)=y(e^t)$, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions deux fois dérivables. Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, puisque pour tout réel strictement positif x, $y(x)=z(\ln x)$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Pour t réel, posons donc $x=e^t$ puis, $z(t)=y(x)=y(e^t)$. Alors, $z'(t)=e^ty'(e^t)=xy'(x)$ puis $z''(t)=e^ty'(e^t)+(e^t)^2y''(e^t)=xy'(x)+x^2y''(x)$. Donc, $xy'(x)=z'(t)$ et $x^2y''(x)=z''(t)-xy'(x)=z''(t)-z'(t)$. Par suite,

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=a(z''(t)-z'(t))+bz'(t)+cz(t)=az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t).$$

Donc,

$$\forall x>0,\ ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0.$$

3. On applique le 2) avec $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. L'équation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors $z''-2z'+z=0$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^t$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda x\ln x+\mu x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 6 ▲

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g\ :\ x\mapsto \lambda e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T)=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt$. Or,

$$\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_x^{x+T}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+\int_0^T e^{a(u+T)}f(u+T)\,du$$
$$=\int_0^x e^{at}f(t)\,dt+e^{aT}\int_0^T e^{au}f(u)du.$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt + e^{-ax} \int_0^T e^{au} f(u)\, du \\ &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)\, dt + g(x) - \lambda e^{-ax}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} g \text{ est } T\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)\, dt - \lambda e^{-ax} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(1-e^{-aT}) = e^{-aT} \int_0^T e^{at} f(t)\, dt \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\, dt \end{aligned}$$

($e^{-aT} \neq 1$ car $a \neq 0$ et $T \neq 0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\, dt e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt.$$
